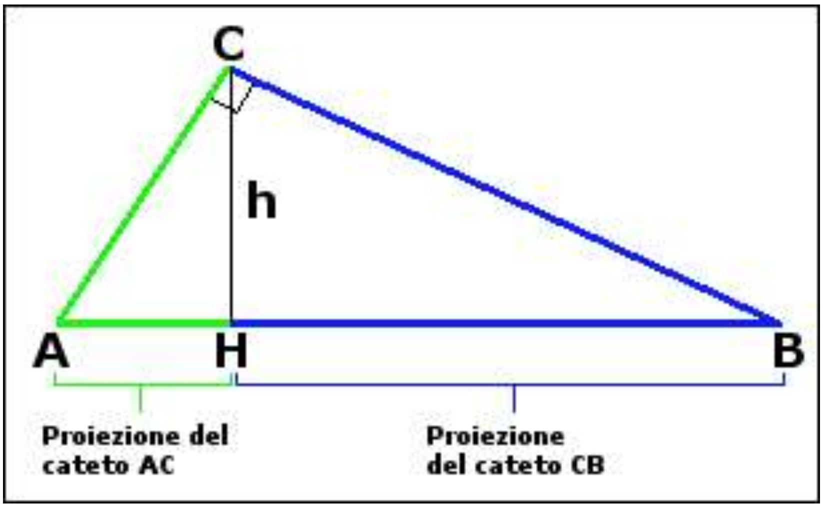
TEOREMI DI EUCLIDE

I TEOREMI DI EUCLIDE VALGONO (COME PITAGORA)

SOLO PER TRIANGOLI RETTANGOLI



PRIMO TEOREMA DI EUCLIDE

Afferma che:

In un triangolo rettangolo ogni cateto è medio proporzionale fra l'ipotenusa e la sua proiezione sull'ipotenusa

Detto in matematichese, si può impostare la seguente proporzione:

$$AB: AC = AC: AH$$

$$oppure$$

$$AB: BC = BC: HB$$

Di conseguenza grazie alla risoluzione delle proporzioni spesso Euclide è utile per calcolare la lunghezze dei cateti o dell'ipotenusa o magari anche solo delle proiezioni dei due cateti.

Esempio:

Calcola perimetro e area di un triangolo rettangolo sapendo che l'ipotenusa e la proiezione di un cateto su di essa misurano rispettivamente $28\ cm\ e\ 10{,}08\ cm$.

$Dati$:

$AB = 28\ cm$

$AH = 10{,}08\ cm\ (ho\ scelto\ AH\ ma\ potevo\ scegliere\ anche\ HB$ è $indifferente)$

Imposto la proporzione grazie al primo teorema di Euclide (prima proporzione) perché conosco 2 membri su 3 della proporzione:

$$AB:AC = AC:AH \rightarrow 28:AC = AC:10,08 \rightarrow AC = \sqrt{AB \cdot AH} = \sqrt{28 \cdot 10,08} = \sqrt{282,24} = 16,8\,cm$$

Una volta noti l'ipotenusa e un cateto posso tranquillamente applicare Pitagora per trovare l'altro cateto e quindi poi il perimetro e l'area:

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{(28)^2 - (16,8)^2} = \sqrt{501,76} = 22,4\ cm$$

$$P = AB + BC + AC = 28 + 22,4 + 16,8 = 67,2\ cm$$

$$A = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{16,8 \cdot 22,4}{2} = 188,16\ cm^2$$

SECONDO TEOREMA DI EUCLIDE

Afferma che:

In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale fra le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa

Detto in matematichese, si può impostare la seguente proporzione:

$$AH:CH = CH:HB$$

Di conseguenza grazie alla risoluzione delle proporzioni spesso Euclide è utile per calcolare la lunghezze dei cateti o dell'ipotenusa o dell'altezza o magari anche solo delle proiezioni dei due cateti.

Esempio:

In un triangolo rettangolo il rapporto fra l'altezza relativa all'ipotenusa e un cateto è $3/5$ e la loro somma misura $120\ cm$. Calcola il perimetro e l'area.

$Dati$:

$CH = \frac{3}{5}AC\ (ho\ scelto\ AC\ ma\ potevo\ scegliere\ anche\ BC\ è\ indifferente)$

$CH + AC = 120\ cm$

Attraverso la tecnica dei pezzetti mi calcolo la misura di $BH\ e\ AC$:

$$3 + 5 = 8 \rightarrow 1p = 120:8 = 15\ cm \rightarrow \begin{cases} CH = 3 \cdot 15 = 45\ cm \\ AC = 5 \cdot 15 = 75\ cm \end{cases}$$

Avendo come dato l'altezza e un cateto posso applicare Pitagora e trovare la proiezione del cateto che conosco:

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{(75)^2 - (45)^2} = \sqrt{3600} = 60\ cm$$

Imposto la proporzione grazie al secondo teorema di Euclide perché conosco 2 membri su 3 della proporzione:

$$AH:CH = CH:HB \rightarrow 60:45 = 45:HB \rightarrow HB = \frac{45 \cdot 45}{60} = 33{,}75\ cm$$

Una volta note le proiezioni dei cateti posso calcolare la lunghezza dell'ipotenusa sommano le due proiezioni:

$$AB = AH + HB = 60 + 33{,}75 = 93{,}75\ cm$$

Avendo come dato l'ipotenusa e un cateto posso applicare Pitagora e trovare il cateto restante:

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{(93{,}75)^2 - (75)^2} = \sqrt{3164{,}1} = 56{,}3\ cm$$

$$P = AB + BC + AC = 93{,}75 + 56{,}3 + 75 = 225{,}1\ cm$$

$$A = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{75 \cdot 56{,}3}{2} = 2111{,}25\ cm^2$$

OSSERVAZIONE:

1) Per applicare correttamente Euclide è utile disegnare il triangolo rettangolo ribaltato quindi con base sull'ipotenusa.
2) Tali teoremi logicamente possono essere applicati a tutti i triangoli rettangoli presenti nelle altre figure piane come abbiamo visto per Pitagora.

SCHEMA RIASSUNTIVO

PRIMO TEOREMA DI EUCLIDE	SECONDO TEOREMA DI EUCLIDE
$AB:AC = AC:AH$ $oppure$ $AB:BC = BC:HB$	$AH:CH = CH:HB$

PRIMO TEOREMA DI EUCLIDE	SECONDO TEOREMA DI EUCLIDE
$AB:AC = AC:AH$ $oppure$ $AB:BC = BC:HB$ Quindi: $AB = (AC \cdot AC):AH$ $AC = \sqrt{AB \cdot AH}$ $AH = (AC \cdot AC):AB$ $AB = (BC \cdot BC):HB$ $BC = \sqrt{AB \cdot HB}$	$AH:CH = CH:HB$ Quindi: $AH = (CH \cdot CH):HB$ $CH = \sqrt{AH \cdot HB}$ $HB = (CH \cdot CH):AH$

$HB = (BC \cdot BC) : AB$	